

Über die Maximalzahl der Endpunkte in Teilbäumen gegebener Graphen

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Michael Kleinert

aus Berlin

Berlin 1969



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550821_0093

Über die Maximalzahl der Endpunkte in Teilbäumen gegebener Graphen

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Michael Kleinert

aus Berlin

Berlin 1969

1. Referent: Prof. Dr. G. Ringel

2. Referent: Prof. Dr. K. P. Grotemeyer

Tag der mündlichen Prüfung: 14. 7. 1969

Tag der Promotion:

1. DEZ. 1969



Diese Arbeit entstand auf Anregung
und unter Betreuung von
Herrn Prof. Dr. G. Ringel
am II. Mathematischen Institut
der Freien Universität Berlin
1969

Meinen lieben Eltern

1. Die erste Zeit, die ich
mit euch verbracht habe, war die
beste Zeit meines Lebens.

2. Die zweite Zeit, die ich
mit euch verbracht habe, war die
beste Zeit meines Lebens.

3. Die dritte Zeit, die ich
mit euch verbracht habe, war die
beste Zeit meines Lebens.

4. Die vierte Zeit, die ich
mit euch verbracht habe, war die
beste Zeit meines Lebens.

5. Die fünfte Zeit, die ich
mit euch verbracht habe, war die
beste Zeit meines Lebens.



Inhaltsverzeichnis

	Seite
Zeichenerklärung	6
Einleitung	7
I. Die Maximalzahl der Endpunkte in Teilbäumen von Graphen mit $n-1$ Knotenpunkten vom Grade 3 und einem Knotenpunkt vom Grade 1	9
II. Die Maximalzahl der Endpunkte in Teilbäumen endlicher kubischer Graphen	41
Literaturverzeichnis	48
Zusammenfassung	49
Lebenslauf	50

Zeichenerklärung

- ▲ Beliebiger Knotenpunkt
- Knotenpunkt vom Baumgrade 3
- ⊖ Knotenpunkt vom Baumgrade 2
- Knotenpunkt vom Baumgrade 1
(Endpunkt im Gerüst)
- ▽ Knotenpunkt w vom Grade 1
- :: Nicht mehr oder noch nicht vorhandener Knotenpunkt

- Kante im Gerüst B(G)
- Kante im Graphen G, die keine Kante im Gerüst B(G) ist
- . - . - . Kante im Graphen G, die Kante im Gerüst B(G) oder keine Kante im B(G) ist
- Kantenzug im Gerüst B(G)
- ... usw. (3 Punkte)

➤ Übergang von einem Graphen zu einem anderen

a^i (Knotenpunkt) a vom Baumgrade i

a^{ij} (Knotenpunkt) a vom Baumgrade i oder j

Einleitung

Für die Nutzung der Räume einer Wohnung mit vorgegebenem Grundriß kann es von Interesse sein, die Wohnung so einzuteilen, daß möglichst viele Räume entstehen, die nicht Durchgangsräume sind. Gelangt man beim Betreten der Wohnung in eine Diele, von der zu jedem anderen Raum der Wohnung mindestens eine Tür führt, so braucht man nur die Diele als Durchgangsraum zu benutzen.

Interessant wird dieses Problem erst, wenn man an die Anordnung der Türen einschränkende Bedingungen stellt, z. B. die folgenden:

1. Genau eine Tür führt von außen in die Wohnung.
2. Jeder Raum hat genau drei Türen.
3. Zwei Räume sind höchstens durch eine Tür verbunden.

Als Beispiele sollen zwei Grundrisse mit je 7 Räumen betrachtet werden, in denen die obigen Bedingungen für die Türen gelten. In den dargestellten Grundrissen erhält man im ersten Fall (Abb. 1a) höchstens 4 Räume, im zweiten Fall (Abb. 1b) höchstens 3 Räume, die keine Durchgangsräume sind.

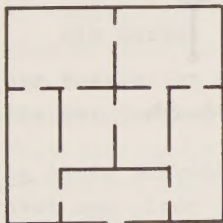


Abb. 1a

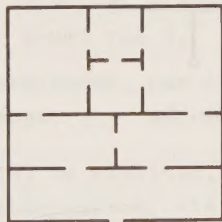


Abb. 1b

Ordnet man jedem Raum und dem Bereich vor der Wohnung je einen Knotenpunkt und jeder Tür eine entsprechende Kante zu (Abb. 2 und Abb. 3), so läßt sich dieses Problem in die Graphentheorie übertragen und führt auf die Betrachtung von Graphen und deren Teilbäumen.

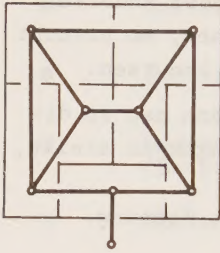


Abb. 2a

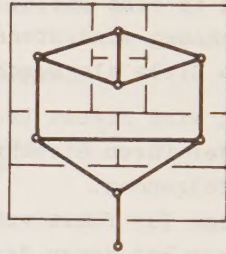


Abb. 2b

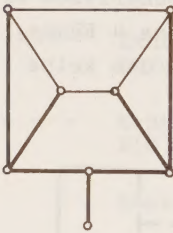


Abb. 3a

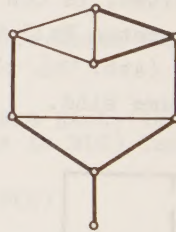


Abb. 3b

I. Die Maximalzahl der Endpunkte in Teilbäumen von Graphen mit $n-1$ Knotenpunkten vom Grade 3 und einem Knotenpunkt vom Grade 1

Wenn B ein Baum ist, so wird mit $e(B)$ die Anzahl der Endpunkte (Knotenpunkte vom Grade 1) von B bezeichnet.

Es sei $e(G)$ das Maximum von $e(B)$, wenn B alle Teilbäume des Graphen G durchläuft:

$$e(G) = \max_{B \subset G} e(B).$$

Satz 1. Für jeden schlingen- und zweiecklosen zusammenhängenden Graphen G mit n Knotenpunkten, von denen ein Knotenpunkt vom Grade 1 ist und $n-1$ Knotenpunkte vom Grade 3 sind, gilt:

$$\frac{n}{4} + 2 \leq e(G) \leq \frac{n}{2} + 1.$$

Beweis:

Da ein Teilbaum B' eines Baumes B nicht mehr Endpunkte enthalten kann als der Baum B , also $e(B) = \max_{B' \subset B} e(B')$ ist, gilt:

Hilfssatz 1. Unter den Teilbäumen B eines Graphen G , für die $e(B) = e(G)$ gilt, existiert mindestens ein Gerüst (aufspannender Baum) von G .

Für den Beweis ist es deshalb ausreichend, nur die Gerüste der Graphen G zu untersuchen.

Um die obere Schranke $\frac{n}{2} + 1$ für $e(G)$ zu erhalten, betrachtet man einen Baum mit n Knotenpunkten, die jeweils höchstens den Grad 3 haben. Bezeichnet n^i die Anzahl der Knotenpunkte vom Grade i ($i = 1, 2, 3$), so gilt im Baum B :

$$(1) \quad n^1 + n^2 + n^3 = n$$

Die Anzahl der Kanten in einem Baum mit n Knotenpunkten ist $n-1$ ¹⁾. Da jeder Knotenpunkt vom Grade i mit i Kanten und jede Kante mit 2 Knotenpunkten inzidiert, gilt im Baum B außerdem:

$$(2) \quad n^1 + 2n^2 + 3n^3 = 2(n-1) .$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$(3) \quad n^1 = \frac{n}{2} + 1 - \frac{n^2}{2} .$$

Gleichung (3) zeigt, daß n^1 höchstens $\frac{n}{2} + 1$ sein kann und daß dieser Wert von n^1 genau dann angenommen wird, wenn $n^2 = 0$ ist. Daher gilt:

Hilfssatz 2. Ein Baum B mit n Knotenpunkten, die jeweils höchstens vom Grade 3 sind, hat

$$e(B) \leq \frac{n}{2} + 1 \text{ Endpunkte.}$$

Da das Gerüst eines Graphen G , der $n-1$ Knotenpunkte vom Grade 3 und einen Knotenpunkt vom Grade 1 besitzt, insgesamt n Knotenpunkte hat und diese höchstens vom Grade 3 sind, gilt für diesen Graphen G : $e(G) \leq \frac{n}{2} + 1$.

Es soll jetzt gezeigt werden, daß $\frac{n}{4} + 2$ eine untere Schranke für $e(G)$ ist.

Dazu werden die folgenden Bezeichnungen eingeführt:

Der Graph G mit n Knotenpunkten, von denen ein Knotenpunkt vom Grade 1 ist und $n-1$ Knotenpunkte vom Grade 3 sind, wird mit $W(n)$ bezeichnet. Der Grad eines Knotenpunktes in einem Gerüst $B(W)$ des Graphen $W(n)$ wird Baumgrad genannt. Die Knotenpunkte des Graphen $W(n)$ werden mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet. Hochgestellte Indizes geben den Baumgrad der Knotenpunkte des $W(n)$ in dem jeweils betrachteten Gerüst an, z. B. a^2 , b^1 , c^3 usw., der Knotenpunkt, der im $W(n)$ vom

¹⁾ D. König (1), p. 51, Satz 9.

Grade 1 ist, wird stets mit w bezeichnet. Die Unterscheidung der Knotenpunkte nach ihrem Baumgrad wird auch in den folgenden Abbildungen deutlich gemacht (siehe Zeichenerklärung). Ein Weg im Gerüst $B(W)$ von dem Knotenpunkt w zu einem anderen Endpunkt u heißt (von w entspringender) *Zweig*, ebenso heißt der Weg von einem im $B(W)$ zwischen w und u liegenden Knotenpunkt v nach u *Zweig*.

Zum Beweis wird zunächst jedem Knotenpunkt des $W(n)$ in einem geeigneten Gerüst $B(G)$ eine Höhe ²⁾ zugeordnet, die auch im $W(n)$ benutzt werden soll:

- (a) Der Knotenpunkt w vom Grade 1 im $W(n)$ hat im Gerüst $B(W)$ die geringste Höhe.
- (b1) Der von w entspringende *Zweig*, der länger als alle anderen ist, wird als *Hauptzweig* bezüglich der anderen von w entspringenden *Zweige* bezeichnet.
- (b2) Sind zwei oder mehr *Zweige* die längsten, so wird der als *Hauptzweig* gewählt, der den am weitesten von w entfernten Knotenpunkt vom Baumgrade 3 enthält.
- (b3) Gibt (b2) auch keine Entscheidung, so wird einer unter den *Zweigen* willkürlich als *Hauptzweig* gewählt, der nach (b1) und (b2) dafür in Frage kommt.
- (c) Von zwei Knotenpunkten x und y auf dem *Hauptzweig* ist der der höhere, der vom Knotenpunkt w im Gerüst $B(W)$ die größere Entfernung hat.
- (d) In einem vom Knotenpunkt x des *Hauptzweiges* abzweigenden *Ast* (Teilbaum) sollen (a), (b) und (c) entsprechend gelten, wobei der Knotenpunkt x die Rolle des Knotenpunktes w übernimmt, mit der Zusatzbedingung in (c), daß alle Höhen in diesem *Ast* kleiner sind als die Höhen der Knotenpunkte im

²⁾ Die hier definierte Höhe stimmt nicht mit der von D. König ((1), p.71) definierten Höhe überein.

Hauptzweig, die höher als x liegen.

(e) Für Äste der in (d) genannten Äste wird entsprechend verfahren.



Abb. 4

In der Abb. 4 gilt demnach für die

Höhen H der Knotenpunkte:

$$H(a) > H(b) > H(c) > H(d) > H(e) > H(f) >$$

$$> H(g) > H(h) > H(w) \quad (\text{nach (b3) könnte auch } H(d) > H(f) > H(e) > H(g) \text{ gelten}).$$

Wenn notwendig, haben die Hauptzweige in den Abbildungen eine größere Strichstärke als die von ihnen abzweigenden Zweige (z. B. in Abb. 6).



Abb. 5



Abb. 6

Für die Lage von Knotenpunkten zueinander wird definiert:

Liegt ein Knotenpunkt x höher als ein Knotenpunkt y , so liegt y tiefer als x , führt dabei der Weg im $B(W)$ von x nach w über y (Abb. 5), so liegt x über y und

y unter x , führt der Weg dabei nicht über y (Abb. 6), so liegt x

abseits-höher von y und y abseits-tiefer von x .

Der Beweis soll nun indirekt geführt werden.

Angenommen, es existiert ein Graph $W(n)$, der kein Gerüst $B(W)$ mit $e(B) \geq \frac{n}{4} + 2$ Endpunkten besitzt.

Zum Nachweis des Widerspruchs werden ein Graph $\underline{W}(n)$ und ein Gerüst $\underline{B}(\underline{W})$ dieses Graphen betrachtet, die die folgenden Voraussetzungen erfüllen.

- (V1) (a) Für den Graphen $\underline{W}(n)$ gilt $e(\underline{W}) < \frac{n}{4} + 2$, und
 (b) es gibt keinen $W(n)$ der (a) erfüllt und weniger Knotenpunkte als der $\underline{W}(n)$ hat.

(V2) Das Gerüst $\underline{B}(\underline{W})$ enthält $p = e(\underline{B}) = e(\underline{W}) < \frac{n}{4} + 2$ Endpunkte.

Da der $\underline{W}(n)$ nur Knotenpunkte ungeraden Grades hat, ist die Anzahl der Knotenpunkte im $\underline{W}(n)$ gerade ³⁾. Nach (V2) hat der $\underline{W}(n)$ $n > 4p - 8$ Knotenpunkte und, da n gerade ist, $n \geq 4p - 6$ Knotenpunkte. Aus den Gleichungen (1) und (2) folgt, daß ein Baum mit n^1 Endpunkten $n^3 = n^1 - 2$ Knotenpunkte vom Baumgrade 3 besitzt.

Daher gilt:

Hilfssatz 3. Jedes Gerüst $\underline{B}(\underline{W})$ mit $n \geq 4p - 6$ Knotenpunkten und $n^1 = p$ Endpunkten hat

(a) $n^3 = p - 2$ Knotenpunkte vom Baumgrade 3 und

(b) $n^2 \geq 2p - 4$ Knotenpunkte vom Baumgrade 2.

(V3) Unter den Gerüsten, die die Voraussetzung (V2) erfüllen, wird ein $\underline{B}(\underline{W})$ ausgewählt, das zusätzlich folgende Eigenschaften aufweist:

- (a) Kein Gerüst, das (V2) erfüllt, hat einen längeren Hauptzweig als das $\underline{B}(\underline{W})$. Ein auf dem Hauptzweig des $\underline{B}(\underline{W})$ liegender Knotenpunkt vom Baumgrade 2 ist im $\underline{W}(n)$ mit keinem abseits-tiefer liegenden Knotenpunkt vom Baumgrade 2 und keinem tiefer liegenden Knotenpunkt vom Baumgrade 1 verbunden.

Die Voraussetzung (V3a) widerspricht nicht (V2). Die Abb. 7a und die Abb. 8a zeigen Lagen von Knotenpunkten, wie sie im $\underline{B}(\underline{W})$ nach (V3a) nicht vorkommen sollen, die Abb. 7b



Abb. 7a

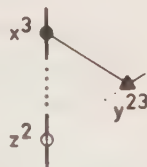


Abb. 7b

³⁾ D. König (1), p. 21, Satz 3;
G. Ringel (2), p. 5, Satz 3.

und Abb. 8b, daß bei sonst gleichen Gerüsten ein $\underline{B}(\underline{W})$ mit den geforderten Eigenschaften existiert.



Abb. 8a



Abb. 8b

- (b) Als nächstes wird der Ast betrachtet, der von dem zuletzt betrachteten Hauptzweig an dem Knotenpunkt vom Baumgrade 3 abzweigt, der am höchsten auf diesem Hauptzweig liegt. Für diesen Ast sollen unter der Einschränkung, daß die vorher geforderten Bedingungen weiter gelten, die unter (a) beschriebenen Eigenschaften in analoger Weise gelten.
- (c) Weiter sollen die unter (b) geforderten Eigenschaften für den noch nicht betrachteten Ast des $\underline{B}(\underline{W})$ gelten, der von dem höchsten Knotenpunkt vom Baumgrade 3 in dem zuletzt betrachteten Hauptzweig abzweigt oder, falls kein solcher existiert, von dem höchsten Knotenpunkt vom Baumgrade 3 darunter.
- (d) Dieses Auswahlverfahren für das $\underline{B}(\underline{W})$ ist für das gesamte Gerüst in sukzessiver Weise anzuwenden.

Bemerkung: Das so ausgewählte Gerüst $\underline{B}(\underline{W})$ braucht nicht das einzige Gerüst des $\underline{W}(n)$ zu sein, das die Voraussetzungen (V2) und (V3) erfüllt.

Es soll jetzt untersucht werden, welche weiteren Eigenschaften das Gerüst $\underline{B}(\underline{W})$ durch die gemachten Voraussetzungen besitzt.

- (E1) Zwei Knotenpunkte y und b vom Baumgrade 2, die im Gerüst $\underline{B(W)}$ nicht miteinander verbunden sind, können nur dann im $\underline{W(n)}$ miteinander verbunden sein, wenn auf dem Weg im $\underline{B(W)}$ zwischen diesen beiden Knotenpunkten y und b kein Knotenpunkt a vom Baumgrade 2 liegt.

Würde zwischen den Knotenpunkten y^2 und b^2 im $\underline{B(W)}$ ein Knotenpunkt a^2 liegen (Abb. 9a), so würde das Gerüst $\underline{B(W)}$ nicht die Voraussetzung (V2) erfüllen, da es sonst ein Gerüst $\underline{B(W)}$ gäbe, das einen Endpunkt mehr als das $\underline{B(W)}$ hätte (Abb. 9b).

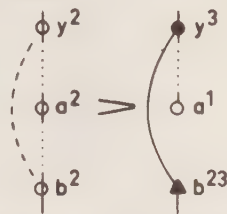


Abb. 9a

Abb. 9b

- (E2) Im $\underline{B(W)}$ können nach (V2) nicht zwei aufeinanderfolgende Knotenpunkte s^2 und t^2 zwischen zwei Knotenpunkten u^1 und y^2 liegen, wenn u^1 und y^2 im $\underline{W(n)}$ durch eine Kante verbunden sind (Abb. 10).

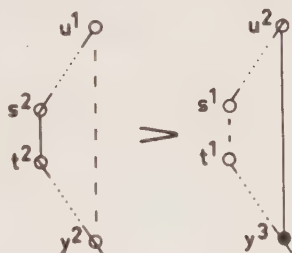


Abb. 10

- (E3) Im $\underline{B(W)}$ kann es nach (V3) keinen Knotenpunkt y^2 unmittelbar über einem Knotenpunkt z^2 geben, wenn y^2 im $\underline{W(n)}$ mit einem abseits-höher liegenden Knotenpunkt u^1 verbunden ist (Abb. 11).

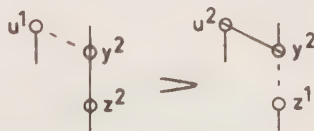


Abb. 11

(E4) Das Gerüst $\underline{B}(\underline{W})$ enthält keinen Weg aus

- (a) vier aufeinanderfolgenden Knotenpunkten vom Baumgrade 2, $z^2 y^2 c^2 b^2$ (Abb. 12),
- (b) zwei aufeinanderfolgenden Knotenpunkten vom Baumgrade 2 und einem unmittelbar darüber liegenden Endpunkt, $z^2 y^2 x^1$ (Abb. 13) und
- (c) drei aufeinanderfolgenden Knotenpunkten vom Baumgrade 2 unmittelbar über dem Knotenpunkt w , $w y^2 c^2 b^2$ (Abb. 14).



Abb. 12

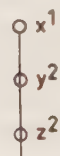


Abb. 13

Da der Knotenpunkt y^2 im $\underline{W}(n)$ vom Grade 3 ist, muß er im $\underline{W}(n)$ zusätzlich mit einem weiteren Knotenpunkt vom Baumgrade 1 oder 2 verbunden sein.

Zu (a): (aa)

y^2 kann mit keinem darüber liegenden Knotenpunkt zusätzlich im $\underline{W}(n)$ verbunden sein. Eine zusätzliche Kante zu einem darüber liegenden Knotenpunkt vom Baumgrade 2 widerspräche (E1); eine zusätzliche Kante zu einem darüber liegenden Knotenpunkt vom Baumgrade 1 ist nach (E2) nicht möglich.

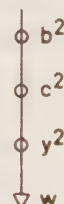


Abb. 14

(ab)

y^2 kann zusätzlich im $\underline{W}(n)$ mit keinem tiefer oder abseits-höher liegenden Knotenpunkt verbunden sein. Eine zusätzliche Verbindung zu einem tiefer oder abseits-höher liegenden Knotenpunkt vom Baumgrade 2 ist im $\underline{W}(n)$ nach (E1) nicht möglich, da stets z^2 dazwischen liegen würde. Weiter kann y^2 nach (V3) nicht mit einem tiefer liegenden Knotenpunkt vom Baumgrade 1 und nach (E3) auch nicht mit einem abseits-höher liegenden Knotenpunkt vom Baumgrade 1 zusätzlich im $\underline{W}(n)$ verbunden sein.

Also kann y^2 mit keinem Knotenpunkt zusätzlich im $\underline{W}(n)$ verbunden sein.

Zu (b):

Aus der Lage des y^2 ergibt sich, daß y^2 mit keinem darüber liegenden Knotenpunkt zusätzlich im $\underline{W}(n)$ verbunden sein kann, ansonsten gilt (ab).

Zu (c):

Hier folgt aus der Lage des Knotenpunktes y^2 , daß er zusätzlich im $\underline{W}(n)$ nicht mit einem tiefer oder abseits-höher liegenden Knotenpunkt verbunden sein kann. Im übrigen gilt (aa).

(E5) Liegt im $\underline{B}(\underline{W})$ ein Knotenpunkt d vom Baumgrade 1 oder 2 so, wie es die Abb. 15 zeigt, so kann d nicht zusätzlich im $\underline{W}(n)$ mit einem tiefer oder abseits-höher liegenden Knotenpunkt c vom Baumgrade 2 verbunden sein.



Abb. 15

Nach Voraussetzung (V3) kann d nicht mit einem abseits-höher liegenden Knotenpunkt c^2 zusätzlich im $\underline{W}(n)$ verbunden sein. Nach (E1) kann c^2 im $\underline{B}(\underline{W})$ nicht zwischen y und b liegen. Die Abb. 16 zeigt, daß das Gerüst $\underline{B}(\underline{W})$ nicht die Voraussetzung (V2)

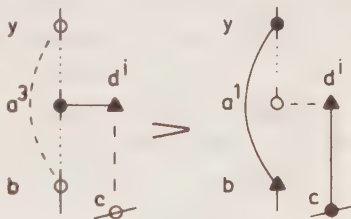


Abb. 16

erfüllen würde, wenn d zusätzlich im $\underline{W}(n)$ mit einem tiefer liegenden Knotenpunkt c^2 verbunden wäre.



Abb. 17

(E6) Liegen im Gerüst $\underline{B}(\underline{W})$ zwei Knotenpunkte e und f vom Baumgrade 1 so, wie es die Abb. 17 zeigt, so können e^1 und f^1 zu-

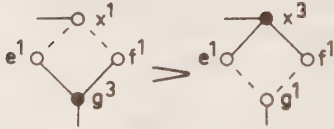


Abb. 18

sätzlich im $\underline{W}(n)$ nicht mit einem gemeinsamen höher liegenden Knotenpunkt x^1 verbunden sein, da das $\underline{B}(\underline{W})$ sonst nicht (V3) erfüllen würde (Abb. 18).



Abb. 19

(E7) Ist ein Knotenpunkt x^1 im $\underline{B}(\underline{W})$ mit einem Knotenpunkt y^2 verbunden (Abb. 19), so kann x^1 zusätzlich im $\underline{W}(n)$ nur mit zwei tiefer liegenden Knotenpunkten vom Baumgrade 1 verbunden sein, die beide im $\underline{B}(\underline{W})$ mit je einem anderen Knotenpunkt vom Baumgrade 3 verbunden sind.

Nach der Voraussetzung (V2) kann x^1 mit keinem Knotenpunkt r vom Baumgrade 2 und nach (V3) auch mit keinem höher liegenden Knotenpunkt t vom Baumgrade 1 zusätzlich im $\underline{W}(n)$ verbunden sein (Abb. 20 und Abb. 21).

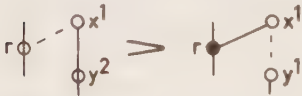


Abb. 20

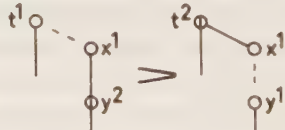


Abb. 21

Hieraus folgt, daß x^1 nur mit tiefer liegenden Knotenpunkten e und f vom Baumgrade 1 zusätzlich im $\underline{W}(n)$ verbunden sein kann, die im $\underline{B}(\underline{W})$ jeweils mit einem Knotenpunkt g bzw. h vom Baumgrade 3 verbunden sind. Nach (E6) können g^3 und h^3 nicht derselbe Knotenpunkt sein.

- (E8) Zwischen zwei Knotenpunkten u_1^1 und u_2^1 , die zusätzlich im $\underline{W}(n)$ je mit einem Knotenpunkt vom Baumgrade 2 verbunden sind, liegen im $\underline{B}(\underline{W})$ mindestens zwei Knotenpunkte vom Baumgrade 3.

Nach (E7) müssen u_1^1 und u_2^1 im $\underline{B}(\underline{W})$ je mit einem Knotenpunkt vom Baumgrade 3 verbunden sein. Die

Abb. 22 zeigt, daß dieses nicht der gleiche Knoten-

punkt h^3 sein kann, da dann das $\underline{B}(\underline{W})$ nicht die Voraussetzung (V2) erfüllen würde.

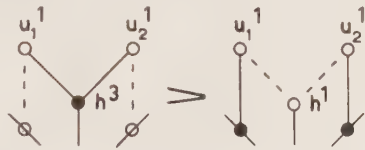


Abb. 22

- (E9) Jeder Knotenpunkt d vom Baumgrade 1 ist im $\underline{W}(n)$ mit mindestens einem anderen Knotenpunkt vom Baumgrade 1 verbunden.

Ist ein Knotenpunkt d^1 im $\underline{W}(n)$ nur mit Knotenpunkten vom Baumgrade 2 verbunden (Abb. 23), so erfüllt das $\underline{B}(\underline{W})$ nach (E7) nicht die Voraussetzung (V2).

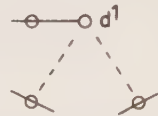


Abb. 23

Ist d^1 im $\underline{B}(\underline{W})$ mit einem Knotenpunkt s_1^3 und zusätzlich im $\underline{W}(n)$ mit zwei Knotenpunkten s_2^2 und s_3^2 verbunden (Abb. 24a), so erfüllt der $\underline{W}(n)$ nicht die Voraussetzung (V1b), da man in diesem Fall einen $W'(n')$ mit $n' = n - 4$ Knotenpunkten konstruieren kann, der (V1a) erfüllt.

Man entfernt dazu aus dem $\underline{W}(n)$ die Knotenpunkte d , s_1 , s_2 und s_3 und alle Kanten, die mit diesen vier Knotenpunkten inzidieren. Die Kantenzüge $r_i s_i t_i$ ($i = 1, 2, 3$) werden durch die Kanten $r_i t_i$ ersetzt (Abb. 24b), wobei nach (E1) und (E5) kein Zweieck entstehen kann. Ist $s_1 = r_2$ oder $s_2 = r_3$, so verfährt man entsprechend.

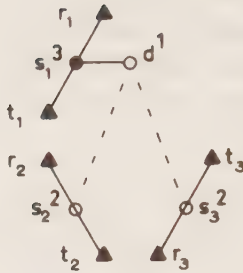


Abb. 24a

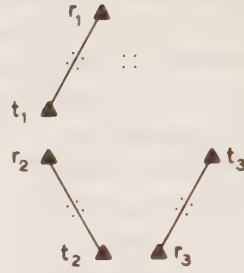


Abb. 24b

Der so gewonnene Graph ist ein $W'(n')$ mit $n' = n - 4$ Knotenpunkten, und er enthält kein Gerüst mit p oder mehr Endpunkten, d.h., der $W'(n')$ erfüllt (V1a).

Angenommen, im $W'(n')$ existiert ein Gerüst $B'(W')$ mit p oder mehr Endpunkten, dann kann man im $\underline{W}(n)$ ein Gerüst $\underline{B}'(\underline{W})$ konstruieren, das mindestens $p+1$ Endpunkte hat, d.h., der $\underline{W}(n)$ erfüllt nicht (V1a).

(a)

Sind im $B'(W')$ die drei Kanten $r_i t_i$ ($i = 1, 2, 3$) enthalten, so wählt man das $\underline{B}'(\underline{W})$ so, daß es die drei Kantenzüge $r_i s_i t_i$ ($i = 1, 2, 3$) enthält, d. Endpunkt wird und im übrigen dieselben Kanten wie das $B'(W')$ enthält (z.B. Abb. 24). Das Gerüst $\underline{B}'(\underline{W})$ besitzt dann mindestens $p+1$ Endpunkte. Waren ursprünglich im $\underline{W}(n)$ o.B.d.A. $s_1 = r_2$ oder $s_2 = r_3$, so verfährt man entsprechend (z.B. Abb. 25).



Abb. 25

(b)

Sind o.B.d.A. $r_1 t_1$ und $r_2 t_2$ Kanten im $B'(W')$ und $r_3 t_3$ keine Kante im $B'(W')$, so zeigt Abb. 26, wie man im $\underline{B}'(\underline{W})$ die Kanten wählen kann, damit das $\underline{B}'(\underline{W})$ mindestens $p+1$ Endpunkte besitzt.



Abb. 26

War ursprünglich im $\underline{W}(n)$ $s_1 = r_2$, so verfährt man entsprechend (Abb. 27). Da $r_2 t_2$ Kante im $B'(W')$ ist und $r_3 t_3$ keine Kante im $B'(W')$ ist, konnte s_2 im $\underline{W}(n)$ nicht gleich r_3 sein.

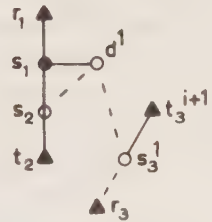


Abb. 27

(c)

Ist o.B.d.A. nur die Kante $r_1 t_1$ von den drei Kanten $r_i t_i$ ($i = 1, 2, 3$) im $B'(W')$ enthalten, so wählt man die Kanten im $\underline{B}'(\underline{W})$ so, wie es Abb. 28 zeigt. Hierbei hat das Gerüst $\underline{B}'(\underline{W})$ auch mindestens $p+1$ Endpunkte. War im $\underline{W}(n)$ $s_2 = r_3$, so verfährt man entsprechend, $s_1 = r_2$ ist hierbei nicht möglich gewesen.

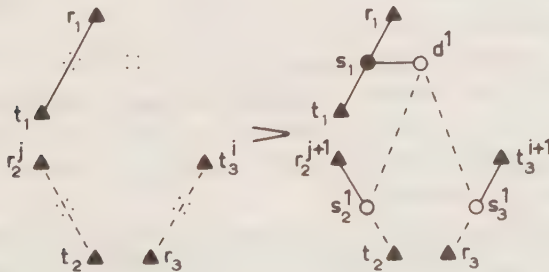


Abb. 28

(d)

Abb. 29 zeigt, wie man die Kanten im $\underline{B}'(\underline{W})$ wählen kann, wenn keine Kante $r_i t_i$ ($i = 1, 2, 3$) im $\underline{B}'(\underline{W})$ enthalten ist. Auch hier hat das $\underline{B}'(\underline{W})$ dann mindestens $p+1$ Endpunkte. Waren ursprünglich im $\underline{W}(n)$ o.B.d.A. $s_1 = r_2$ oder $s_2 = r_3$, so verfährt man entsprechend.

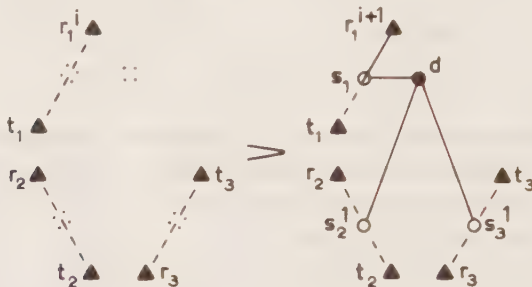


Abb. 29

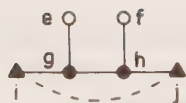


Abb. 30

(E10) Die in Abb. 30 gezeigte Lage der Knotenpunkte e und f ist im $\underline{B}(\underline{W})$ nicht möglich, wenn e und f zusätzlich im $\underline{W}(n)$ mit einem höher liegenden Knotenpunkt x^1 verbunden sind.

Sind i und j beides Knotenpunkte vom Baumgrade 2, so würde das $\underline{B}(\underline{W})$ nicht (V2) erfüllen, ist o.B.d.A.

i vom Baumgrade 1, so würde das $\underline{B}(\underline{W})$ nicht

(V3) erfüllen (Abb. 31). Da das Gerüst $\underline{B}(\underline{W})$ zusammenhängend ist, können i und j nicht gleichzeitig vom Baumgrade 1 sein.



Abb. 31

Wie man leicht sieht, wäre die beschriebene Lage auch dann nicht möglich, wenn im $\underline{B}(\underline{W})$ auf dem Weg

zwischen i und j zusätzlich noch ein Knotenpunkt b^2 liegen würde.

(E11) Ist ein Knotenpunkt y^2 im $\underline{B}(\underline{W})$ mit einem Knotenpunkt x^1 verbunden (Abb. 32), so gilt:

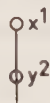


Abb. 32

- (a) y^2 kann nach (V3) mit keinem abseits- tiefer liegenden Knotenpunkt zusätzlich im $\underline{W}(n)$ verbunden sein.
- (b) Nach (V3) kann y^2 auch nicht mit einem höher liegenden Knotenpunkt vom Baumgrade 2 zusätzlich im $\underline{W}(n)$ verbunden sein.
- (c) y^2 kann nach (E1) mit keinem unter ihm liegenden Knotenpunkt b^2 zusätzlich im $\underline{W}(n)$ verbunden sein, wenn im $\underline{B}(\underline{W})$ zwischen y^2 und b^2 ein Knotenpunkt vom Baumgrade 2 liegt.

Die noch verbleibenden Möglichkeiten werden in (E12) und (E13) behandelt.

(E12) Es existiert im $\underline{B}(\underline{W})$ kein Knotenpunkt y^2 , der so liegt, wie es die Abb. 33 zeigt.



Abb. 33

Beim Nachweis sollen mehrere Fälle unterschieden werden:

- (a) a^3 und b^2 sind im $\underline{B}(\underline{W})$ miteinander durch eine Kante verbunden, und x^1 ist zusätzlich im $\underline{W}(n)$ mit keinem Knotenpunkt verbunden, der auf dem von a^3 abzweigenden Ast liegt.
- (b) a^3 und b^2 sind im $\underline{B}(\underline{W})$ miteinander durch eine Kante verbunden, und x^1 ist zusätzlich im $\underline{W}(n)$ mit einem Knotenpunkt verbunden, der auf dem von a^3 abzweigenden Ast liegt.

(c)

a^3 und b^2 sind im $\underline{B(W)}$ nicht durch eine Kante miteinander verbunden, d.h., im $\underline{B(W)}$ liegt zwischen a^3 und b^2 mindestens ein Knotenpunkt.

Zu (a):

Der Graph $\underline{W(n)}$ läßt sich in einen anderen Graphen $W'(n')$ mit $n' < n$ Knotenpunkten umwandeln, in dem auch (V1a) gilt. Damit erfüllt aber der $\underline{W(n)}$ nicht die Voraussetzung (V1b).

Um den $W'(n')$ zu erhalten, werden zunächst die Knotenpunkte x, y, a und b und die Kanten xy, ya und yb entfernt. Der Weg $cbad$ wird durch die Kante cd ersetzt (Abb. 34), was nach (E5) kein Zweieck ergeben kann. Die beiden Kanten xe und xf , mit denen x^1 im $\underline{W(n)}$ nach (E7) mit tiefer liegenden Knotenpunkten e^1 und f^1 verbunden ist, werden in den Abschnitten (aa) und (ab) gesondert betrachtet.

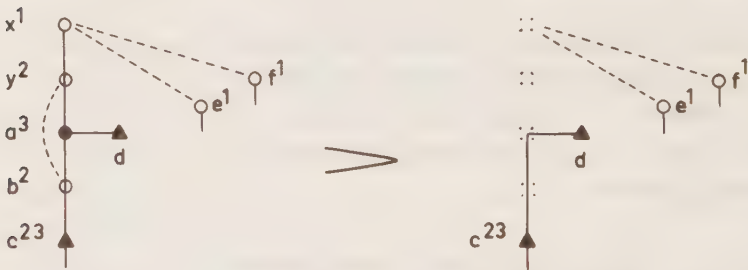


Abb. 34

In dem neu entstehenden Graphen $W'(n')$ ist es nicht möglich, ein Gerüst mit p oder mehr Endpunkten zu finden. Gäbe es ein Gerüst $B'(W')$ mit p oder mehr Endpunkten, so ließe sich nach dem Einfügen der vier bisher entfernten Knotenpunkte und der dazugehörigen Kanten in den $W'(n')$ im $\underline{W(n)}$ ein Gerüst $\underline{B'(W)}$ angeben, das $p+1$ oder mehr Endpunkte besäße, d.h., der $\underline{W(n)}$ würde nicht (V1a) erfüllen.

Mit Rücksicht auf die noch folgenden Ausführungen wird unterschieden:

(a1)

Der Knotenpunkt x soll im $\underline{B}'(\underline{W})$ nicht mit e oder f verbunden werden.

(a11)

Ist hierbei cd eine Kante im $B'(W')$, so wählt man die hinzukommenden Kanten im $\underline{B}'(\underline{W})$ so, wie sie vorher im $\underline{B}(\underline{W})$ waren (z.B. Abb. 34), und das $\underline{B}'(\underline{W})$ hat mindestens einen Endpunkt mehr als das $B'(W')$.

(a12)

Ist cd keine Kante im $B'(W')$, so kann man im $\underline{B}'(\underline{W})$ die hinzukommenden Kanten so wählen, wie es Abb. 35 zeigt. Auch hierbei hat das $\underline{B}'(\underline{W})$ mindestens einen Endpunkt mehr als das $B'(W')$.

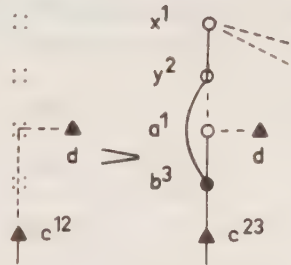


Abb. 35

(a2)

Der Knotenpunkt x muß im $\underline{B}'(\underline{W})$ mit e oder f verbunden werden.

Hier kann man anstelle von x in (a11) bzw. (a12) den Knotenpunkt y als zusätzlichen Endpunkt wählen (Abb. 36), so daß auch hierbei das $\underline{B}'(\underline{W})$ mindestens einen Endpunkt mehr hat als das $B'(W')$.



Abb. 36

(aa)

Die beiden Knotenpunkte e^1 und f^1 sind im $\underline{W}(n)$ nicht durch eine Kante verbunden (Abb. 37a).



Abb. 37a

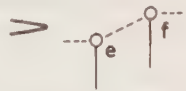


Abb. 37b

In diesem Fall wird der Kantenzug exf des $\underline{W}(n)$ durch die Kante ef im $W'(n')$ ersetzt (Abb. 37). Der $W'(n')$ hat damit $n' = n - 4$ Knotenpunkte, und es existiert im

$W'(n')$ kein Gerüst mit p oder mehr Endpunkten, d.h., der $\underline{W}(n)$ erfüllt nicht (V1b).

Gäbe es im $W'(n')$ ein Gerüst $B'(W')$ mit p oder mehr Endpunkten, so ließe sich im $\underline{W}(n)$ ein Gerüst $\underline{B'}(\underline{W})$ finden, das $p+1$ oder mehr Endpunkte besäße, womit der $\underline{W}(n)$ nicht (V1a) erfüllen würde.

Für dieses $B'(W')$ könnte gelten:

(aa1)

e und f sind im $B'(W')$ nicht miteinander verbunden (z.B. Abb. 37b). Man wählt dann im $\underline{B'}(\underline{W})$ weder $x e$ noch $x f$ als Kante (Abb. 37a) und nach (a1) besitzt das Gerüst $\underline{B'}(\underline{W})$ mindestens $p+1$ Endpunkte.

::



Abb. 38

(aa2)

e und f sind im $B'(W')$ miteinander verbunden. Die Kante ef des $B'(W')$ wird hierbei durch

den Kantenzug exf im $\underline{B'}(\underline{W})$ ersetzt (Abb. 38). Nach (a2) existiert dann auch ein Gerüst $\underline{B'}(\underline{W})$ mit mindestens $p+1$ Endpunkten.

(ab)

Die beiden Knotenpunkte e^1 und f^1 sind im $\underline{W}(n)$ durch eine Kante verbunden (Abb. 39).

Nach (E6) sind e^1 und f^1 im $\underline{B}(\underline{W})$ mit zwei verschiedenen Knotenpunkten g^3 und h^3 verbunden.



Abb. 39

(aba)

Im $\underline{W}(n)$ existiert keine Kante gh .

In diesem Fall entfernt man die Knotenpunkte e und f und alle Kanten, die mit ihnen inzidieren und verbindet im $W'(n')$ die Knotenpunkte g und h (Abb. 40).

Dabei kann kein Zweieck entstehen. Es ist auch möglich, daß z.B. $g = c$ ist.

Der entstandene Graph $W'(n')$ hat $n' = n - 6$ Knotenpunkte und besitzt



Abb. 40

kein Gerüst mit $p-1$ oder mehr Endpunkten. Damit erfüllt der $\underline{W}(n)$ aber nicht die Voraussetzung (V1b).

Gäbe es im $W'(n')$ ein Gerüst $B'(W')$ mit $p-1$ oder mehr Endpunkten, so würde es ein $\underline{B}'(\underline{W})$ mit $p+1$ oder mehr Endpunkten geben, was (V1a) widerspräche.

Für ein solches $B'(W')$ könnte gelten:

(aba1)

g und h sind im $B'(W')$ durch eine Kante verbunden. Die Kanten im $\underline{B}'(\underline{W})$ sind dann so zu wählen, wie es Abb. 41 zeigt. Zusammen mit (a2) erhält man ein Gerüst $\underline{B}'(\underline{W})$ mit mindestens $p+1$ Endpunkten, was für den $\underline{W}(n)$ ein Widerspruch zu (V1a) ist.



Abb. 41

(aba2)

g und h sind im $B'(W')$ durch keine Kante verbunden.



Abb. 42

Abb. 42 zeigt, daß es unter Benutzung von (a2) auch in diesem Fall ein Gerüst $\underline{B}'(\underline{W})$ mit mindestens $p+1$ Endpunkten gibt.

(abb)

Im $\underline{W}(n)$ sind die Knotenpunkte g und h durch eine Kante verbunden.

Da g und h Knotenpunkte vom Baumgrade 3 sind, liegt die Kante gh auch im $\underline{B}(\underline{W})$. Man entfernt jetzt die Knotenpunkte e, f, g und h sowie alle Kanten, die mit diesen Knotenpunkten inzidieren, und verbindet im $\underline{W}'(n')$ die Knotenpunkte i und j , mit denen g bzw. h im $\underline{W}(n)$ verbunden waren (Abb. 43). Nach (E10) entsteht dadurch kein Zweieck. Hierbei kann z.B. $i = c$ oder nach (E5) z.B. auch $g = c$ sein.



Abb. 43

Es folgt ein Schluß wie unter (aba):

Der entstandene Graph $\underline{W}'(n')$ hat $n' = n - 8$ Knotenpunkte, und er besitzt kein Gerüst mit $p-1$ oder mehr Endpunkten, d.h., der $\underline{W}(n)$ erfüllt nicht (V1b).

Gäbe es ein $\underline{B}'(\underline{W}')$ mit $p-1$ oder mehr Endpunkten, so könnte im $\underline{B}'(\underline{W}')$ gelten:

(abb1)

Das $\underline{B}'(\underline{W}')$ enthält die Kante ij .

Hierbei kann man die Kanten im $\underline{B}'(\underline{W})$ so wählen, wie sie waren (Abb. 43).

(abb2)

Das $\underline{B}'(\underline{W}')$ enthält nicht die Kante ij .

In diesem Fall wird man die Kanten im $\underline{B}'(\underline{W})$ so wählen, wie es Abb. 44 zeigt.



Abb. 44

In beiden Fällen erhält man zusammen mit (a1) im $\underline{B}'(\underline{W})$ mindestens $p+1$ Endpunkte, der $\underline{W}(n)$ erfüllt also nicht (V1a).

Zu (b):

Nach (E7) kann x^1 zusätzlich im $\underline{W}(n)$ nur mit einem tiefer liegenden Knotenpunkt vom Baumgrade 1 verbunden sein, der im $\underline{B}(\underline{W})$ mit einem Knotenpunkt vom Baumgrade 3 verbunden ist. Daraus folgt, daß x^1 im Fall (b) auf dem Hauptzweig durch a liegt. Der vom Hauptzweig in a abzweigende Ast darf daher keinen Knotenpunkt vom Baumgrade 3 besitzen, und nach (E7) muß deshalb x^1 zusätzlich im $\underline{W}(n)$ mit d^1 verbunden sein (Abb. 45).



Abb. 45

Wenn im $\underline{W}(n)$ die Kante xd existiert, so können x und d nicht zusätzlich im $\underline{W}(n)$ mit einem gemeinsamen Knotenpunkt e^1 verbunden sein, da sonst das $\underline{B}(\underline{W})$ nicht (V2) erfüllen würde (Abb. 46).

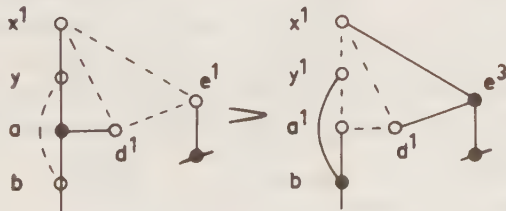


Abb. 46

Damit läßt sich im Fall (b) das gleiche Verfahren wie in (aa) anwenden, um den gewünschten Widerspruch zu erhalten.

Zu (c):

In diesem Fall liegt zwischen a und b mindestens ein Knotenpunkt vom Baumgrade 3 (Abb. 47).

Die Knotenpunkte, die im $\underline{B}(\underline{W})$ zwischen a und b liegen und im $\underline{B}(\underline{W})$ mit a bzw. b verbunden sind, werden mit u^3 bzw. v^3 bezeichnet (Abb. 48a). Dabei ist es möglich, daß $u^3 = v^3$ ist.

Auch im Fall (c) läßt sich stets ein $W'(n')$ mit $n' < n$ Knotenpunkten finden, der (V1a) erfüllt.



Abb. 47

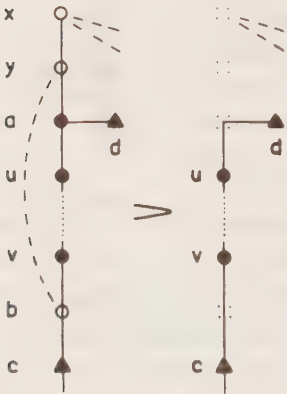


Abb. 48a

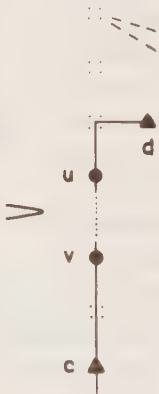


Abb. 48b

Zunächst entfernt man die Knotenpunkte x, y, a und b und die Kanten xy, ya und yb. Die Wege uad und cbv im $\underline{W}(n)$ werden im $W'(n')$ durch die Kanten ud bzw. cv ersetzt (Abb. 48).

Für die von x zu den Knotenpunkten e und f verlaufenden Kanten kann man (aa), (ab) und (b) heranziehen. Liegt der Knotenpunkt b^2 im Fall (aba) im $\underline{B}(\underline{W})$ als einziger Knotenpunkt zwischen g und h, so behandelt man dieses wie

(abb). Die Absätze (a1) und (a2) müssen allerdings im Fall (c) durch die folgenden (c1) bzw. (c2) ersetzt werden.

(c1)

Der Knotenpunkt x soll im $\underline{B}'(\underline{W})$ nicht mit e oder f verbunden werden.

(c11)

Im $B'(W')$ sind die Kanten cv und ud beide enthalten. Man wählt hierbei die hinzukommenden Kanten im $\underline{B}'(\underline{W})$ so, wie sie im $\underline{B}(\underline{W})$ waren (z.B. Abb. 48), und das $\underline{B}'(\underline{W})$ hat dadurch zusätzlich mindestens einen Endpunkt mehr als das $B'(W')$.

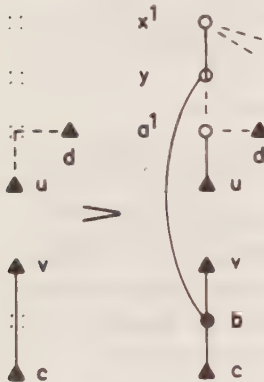


Abb. 49

(c12)

Im $B'(W')$ ist die Kante cv enthalten, aber nicht die Kante ud . Abb. 49 zeigt, wie man im $\underline{B}'(\underline{W})$ die Kanten wählen kann, damit im $\underline{B}'(\underline{W})$ zusätzlich mindestens ein Endpunkt mehr liegt als im $B'(W')$.

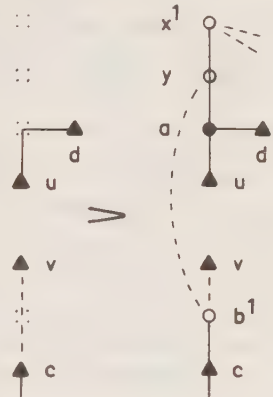


Abb. 50

(c13)

Im $B'(W')$ ist die Kante ud enthalten, nicht aber die Kante cv . In diesem Fall zeigt Abb. 50, daß

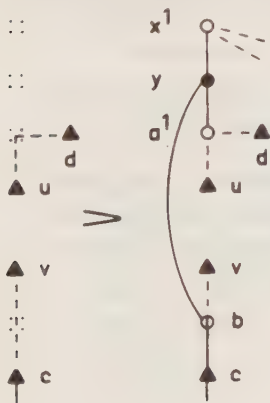


Abb. 51

auch hierbei ein $\underline{B}'(\underline{W})$

mit zusätzlich mindestens einem Endpunkt mehr als im $B'(W')$ existiert.

(c14)

Im $B'(W')$ ist weder cv noch ud eine Kante.

Man wählt hierbei die Kanten im $\underline{B}'(\underline{W})$ so, wie es die Abb. 51 zeigt. Das $\underline{B}'(\underline{W})$ hat auch dadurch wieder zusätzlich mindestens einen Endpunkt mehr als das $B'(W')$.

(c2)

Der Knotenpunkt x muß im $\underline{B}'(\underline{W})$ mit e oder f verbunden werden.

(c21)

Im $B'(W')$ ist cv oder ud eine Kante.

Man kann hierbei (c11), (c12) bzw.

(c13) benutzen, wenn man anstelle von

x den Knotenpunkt y als Endpunkt

wählt (Abb. 52).



Abb. 52

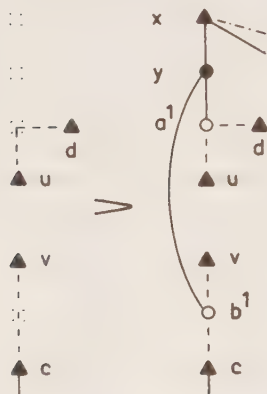


Abb. 53

(c22)

Im $B'(W')$ ist weder cv noch ud eine Kante.

In diesem Fall zeigt Abb. 53, wie man im $\underline{B}'(\underline{W})$ die Kanten wählen kann, damit das $\underline{B}'(\underline{W})$ zusätzlich mindestens einen Endpunkt mehr als das $B'(W')$ hat.

Liegt der Knotenpunkt b^2 so, daß man ihn bereits unter (ab) berücksichtigen mußte, so geht man bei (c1) und (c2) davon aus, daß die unter (ab) angegebenen Kanten

bereits in das $\underline{B}'(\underline{W})$ eingefügt sind.

Für die folgenden Eigenschaften des Gerüsts $\underline{B}(\underline{W})$ wird die Bezeichnung Intervall eingeführt:

Ein Weg im $\underline{B}(\underline{W})$ zwischen zwei Knotenpunkten vom Baumgrade 3, der, wenn es sich nicht nur um eine Kante handelt, nur über Knotenpunkte vom Baumgrade 2 führt, ohne seine beiden Endpunkte vom Baumgrade 3 heißt Intervall.

- (E13) Ist ein Knotenpunkt y^2 im $\underline{B}(\underline{W})$ mit einem Knotenpunkt x^1 verbunden, so kann y^2 nach (E11) und (E12) zusätzlich im $\underline{W}(n)$ nur mit einem abseits-höher liegenden Knotenpunkt u^1 durch eine Kante verbunden sein (Abb. 54). Im $\underline{B}(\underline{W})$ liegen nach (E2) auf dem Weg von y^2 nach u^1

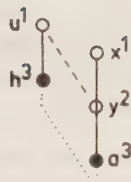


Abb. 54

keine Intervalle mit zwei oder mehr Knotenpunkten.

Nach (E7) ist dieser Knotenpunkt u^1 im $\underline{B}(\underline{W})$ mit einem Knotenpunkt h^3 verbunden. Da u^1 höher als y^2 liegt, kann h^3 nicht gleich a^3 sein, sondern muß höher als a^3 liegen. Es existiert demnach im $\underline{B}(\underline{W})$ auf dem Weg von u^1 nach y^2 unter u^1 ein Intervall, und nach (E13) gilt:

- (E14) Ist ein Knotenpunkt y^2 im $\underline{B}(\underline{W})$ mit einem Knotenpunkt x^1 verbunden, so existiert zusätzlich im $\underline{W}(n)$ eine Kante von y^2 zu einem höher liegenden Knotenpunkt u^1 , der im $\underline{B}(\underline{W})$ mit einem Knotenpunkt h^3 verbunden ist. Unmittelbar unter diesem h^3 existiert ein Intervall, das in dem im $\underline{B}(\underline{W})$ von y^2 nach u^1 führenden Weg enthalten ist und auf dem höchstens ein Knotenpunkt (vom Baumgrade 2) liegt.

- (E15) Besitzt das Gerüst $\underline{B}(\underline{W})$ ein Intervall mit 3 Knotenpunkten, so existiert zusätzlich im $\underline{W}(n)$ eine Kante von einem der Knotenpunkte b^2 oder c^2 auf dem Intervall (Abb. 55) zu einem darüber liegenden Knotenpunkt u^1 , der im $\underline{B}(\underline{W})$ mit einem Knotenpunkt h^3 verbunden ist. Unmittelbar unter diesem h^3 existiert ein Intervall, das in dem im $\underline{B}(\underline{W})$ von b^2 bzw. c^2 nach u^1 führenden Weg enthalten ist und auf dem höchstens ein Knotenpunkt (vom Baumgrade 2) liegt.

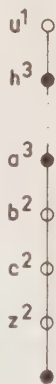


Abb. 55

(a)

Die Knotenpunkte b^2 und c^2 (Abb. 55) können zusätzlich im $\underline{W}(n)$ nur mit über a^3 liegenden Knotenpunkten verbunden sein.

Nach (E1) können b^2 und c^2 nicht mit tiefer oder abseits-höher liegenden Knotenpunkten vom Baumgrade 2 und nach (V3) bzw. (E3) nicht mit tiefer oder abseits-höher liegenden Knotenpunkte vom Baumgrade 1 zusätzlich im $\underline{W}(n)$ verbunden sein.

(b)

Über a^3 (Abb. 55) muß mindestens ein Intervall liegen.

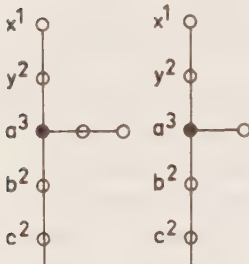


Abb. 56

Gäbe es kein Intervall über a^3 , so wären nach (E4b) nur die in Abb. 56 und Abb. 57 gezeigten Fälle möglich.

(ba)

Die in Abb. 56 gezeigten Fälle sind nicht möglich, da nach (E14) im $\underline{B}(\underline{W})$ auf dem Weg von y^2 zu dem Knotenpunkt u^1 (Abb. 54) mindestens ein Intervall liegen muß und nach (E13) auf keinem Intervall auf die-



Abb. 57

sem Wege mehr als ein Knotenpunkt liegen darf.

(bb)

In Abb. 57 müssen b^2 und c^2 nach (a) und (E9) mit den zwei verschiedenen Knotenpunkten u_1^1 bzw. u_2^1 zusätzlich im $\underline{W}(n)$ verbunden sein, was aber (E8) widerspricht.

(c)

Nach (a) und (E1) kann c^2 nur mit einem über a^3 liegenden Knotenpunkt vom Baumgrade 1 zusätzlich im $\underline{W}(n)$ verbunden sein.

(ca)

Liegt dieser Knotenpunkt d^1 , mit dem c^2 zusätzlich im $\underline{W}(n)$ verbunden ist, auf dem vom Hauptzweig in a^3 abzweigenden Ast, so muß d^1 im $\underline{B}(\underline{W})$ mit a^3 verbunden sein, da sonst (V3) im $\underline{B}(\underline{W})$ nicht erfüllt wäre (Abb. 58).

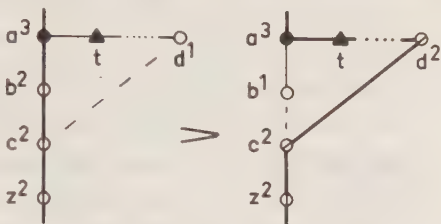


Abb. 58

Da b^2 nach (E9) nicht auch mit d^1 und nach (E5) auch nicht mit einem über a^3 liegenden Knotenpunkt vom Baumgrade 2 zusätzlich im $\underline{W}(n)$ verbunden sein kann, muß b^2 nach (a) mit einem über a^3 liegenden Knotenpunkt u^1 verbunden sein. Nach Teil (b) und (E7) existiert auf dem Weg im $\underline{B}(\underline{W})$ von b^2 nach u^1 ein von a^3 verschiedener Knotenpunkt h^3 , der im $\underline{B}(\underline{W})$ mit u^1 verbunden ist (Abb. 59). Daraus folgt, daß unmittelbar unter diesem h^3 ein Intervall existiert, das in dem im $\underline{B}(\underline{W})$ von b^2 nach u^1 führenden Weg enthalten ist und auf dem nach (E2) höchstens ein Knotenpunkt liegt.



Abb. 59

(cb)

Ist c^2 mit einem Knotenpunkt u^1 zusätzlich im $\underline{W}(n)$ verbunden, der nicht auf dem vom Hauptzweig in a^3 abzweigenden Ast liegt, so muß nach (b) zwischen u^1 und a^3 im $\underline{B}(\underline{W})$ mindestens ein Knotenpunkt liegen, da sonst der Fall (ca) vorliegen würde. Nach (E7) existiert deshalb im $\underline{B}(\underline{W})$ zwischen u^1 und a^3 ein Knotenpunkt h^3 , der von a^3 verschieden ist und der im $\underline{B}(\underline{W})$ mit u^1 verbunden ist. Daraus folgt, daß unmittelbar unter h^3 ein Intervall existiert, das in dem im $\underline{B}(\underline{W})$ von c^2 nach u^1 führenden Weg enthalten ist und auf dem nach (E2) höchstens ein Knotenpunkt liegt.

(E16) Liegen im $\underline{B}(\underline{W})$ unmittelbar über dem Knotenpunkt w zwei aufeinanderfolgende Knotenpunkte b^2 und c^2 (Abb. 60), so existiert zusätzlich im $\underline{W}(n)$ eine Kante von einem der Knotenpunkte b^2 oder c^2 zu einem darüber liegenden Knotenpunkt u^1 , der im $\underline{B}(\underline{W})$ mit einem Knotenpunkt h^3

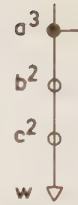


Abb. 60

verbunden ist. Unmittelbar unter diesem h^3 existiert ein Intervall, das in dem im $\underline{B}(\underline{W})$ von b^2 bzw. c^2 nach u^1 führenden Weg enthalten ist und auf dem höchstens ein Knotenpunkt (vom Baumgrade 2) liegt.

Da b , c und w die drei tiefsten Knotenpunkte im $\underline{W}(n)$ sind und abseits-höher von b^2 oder c^2 liegende Knotenpunkte nicht existieren, können b^2 und c^2 zusätzlich im $\underline{W}(n)$ nur mit über a^3 liegenden Knotenpunkten verbunden sein. Damit kann man wie in (b) und (c) von (E15) fortfahren.

(E17) Enthält das Gerüst $\underline{B}(\underline{W})$ insgesamt k der in Abb. 61 gezeigten Anordnungen, so enthält das Gerüst $\underline{B}(\underline{W})$ mindestens k Intervalle mit höchstens einem Knotenpunkt (vom Baumgrade 2).



Abb. 61

Enthält das Gerüst $\underline{B}(\underline{W})$ insgesamt k der in Abb. 61 gezeigten Anordnungen, so existiert nach (E14), (E15) oder

(E16) bei jeder dieser Anordnungen von einem der Knotenpunkte y^2 bzw. b^2 oder c^2 im $\underline{W}(n)$ (aber nicht im $\underline{B}(\underline{W})$) eine Kante zu einem höher liegenden Knotenpunkt u^1 . Da nach (E9) kein Knotenpunkt vom Baumgrade 1 zusätzlich im $\underline{W}(n)$ mit zwei Knotenpunkten vom Baumgrade 2 verbunden sein kann, gibt es im $\underline{B}(\underline{W})$ insgesamt k solche Knotenpunkte u_i^1 . Jeder dieser u_i^1 ist im $\underline{B}(\underline{W})$ mit einem h_i^3 verbunden, und nach (E8) können nicht zwei der u_i^1 mit

demselben h_i^3 im $\underline{B(W)}$ verbunden sein, so daß das $\underline{B(W)}$ insgesamt k solche h_i^3 enthält. Unmittelbar unter jedem dieser h_i^3 liegt nach (E14), (E15) oder (E16) ein Intervall, auf dem höchstens ein Knotenpunkt liegt, d.h., das $\underline{B(W)}$ besitzt mindestens k Intervalle mit höchstens einem Knotenpunkt (vom Baumgrade 2).

(E18) Nach (E4), (E14), (E15), (E16) und (E17) können im $\underline{B(W)}$ nur die in Abb. 62 gezeigten Anordnungen auftreten.

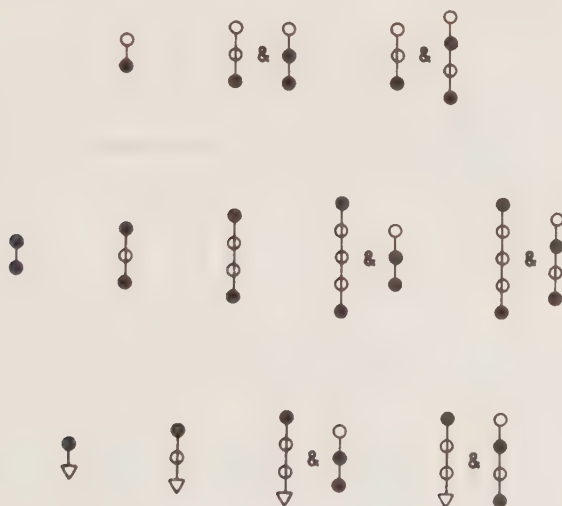


Abb. 62

Nach Hilfssatz 3a enthält das Gerüst $\underline{B(W)}$ $p-2$ Knotenpunkte vom Baumgrade 3 und damit $p-3$ Intervalle und einen Weg zwischen w und dem tiefsten Knotenpunkt vom Baumgrade 3. Nach (E4) und (E17) kann das $\underline{B(W)}$ daher höchstens $2(p-3) + 1 = 2p - 5$ Knotenpunkte vom Baumgrade 2 enthalten, was ein Widerspruch dazu ist, daß das Gerüst $\underline{B(W)}$ nach Hilfssatz 3b mindestens $2p - 4$ Knotenpunkte vom Baumgrade 2 enthalten muß.

Damit ist gezeigt, daß es keinen Graphen $W(n)$ geben kann, für den $e(W) < \frac{n}{4} + 2$ gilt, womit Satz 1 bewiesen ist.

Satz 2. Zu jedem geraden $n \geq 6$ und jedem ganzzahligen p mit $\frac{n}{4} + 2 \leq p \leq \frac{n}{2} + 1$ existiert ein schlingen- und zweieckloser zusammenhängender Graph G mit n Knotenpunkten, von denen ein Knotenpunkt vom Grade 1 ist und $n-1$ Knotenpunkt vom Grade 3 sind, für den $e(G) = p$ gilt.

Beweis:



Abb. 63

Es werden zu jedem geraden $n \geq 6$ und jedem ganzzahligen p mit $\frac{n}{4} + 2 \leq p \leq \frac{n}{2} + 1$ Graphen G mit n Knotenpunkten, von denen einer vom Grade 1 ist und $n-1$ vom Grade 3 sind, angegeben, für die $e(G) = p$ gilt.

Solche Graphen sind in den Abbildungen 63 bis 68 gezeigt, wobei jeweils ein Gerüst $B(G)$ des Graphen G mit eingezeichnet ist, für das $e(B) = e(G)$ gilt.

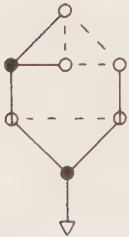


Abb. 64

(a)

Für $n=6$ folgt aus $\frac{n}{4} + 2 \leq p \leq \frac{n}{2} + 1$, daß nur $p=4$ möglich ist. Die Abb. 63 zeigt einen Graphen G mit $n=6$ Knotenpunkten, für den $e(G) = p = 4$ ist.



Abb. 65

(b)

Ist $n=8$, so kann $p=4$ oder $p=5$ sein. Abb. 64 und Abb. 65 zeigen, daß die gesuchten Graphen G mit $n=8$ Knotenpunkten, für die $e(G) = p = 4$ bzw. $e(G) = p = 5$ ist, existieren.

(c)

Bei $n \geq 10$ werden drei Fälle unterschieden.

(ca)

Für $p = \frac{n}{2} + 1$ zeigt die Abb. 66, wie die Graphen G mit $n \geq 10$ Knotenpunkten aussehen können, für die $e(G) = p = \frac{n}{2} + 1$ gilt.

$n - 4$ Knotenpunkte, von denen
im Gerüst $\frac{n}{2} - 2$ Endpunkte sind.

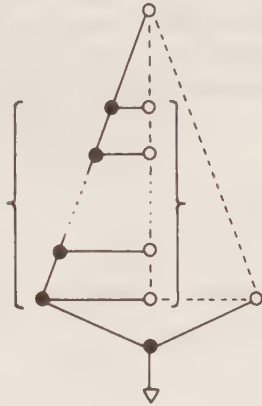


Abb. 66

(cb)

Für $p = \frac{n}{4} + 2$, was nur bei $n \equiv 0 \pmod{4}$ möglich ist, zeigt Abb. 67 Graphen G mit $n \geq 10$ Knotenpunkten, für die $e(G) = p = \frac{n}{4} + 2$ ist. Dabei liegen in dem mit Q gekennzeichneten Teil des Graphen G $n - 8$ Knotenpunkte, von denen im Gerüst $\frac{n - 8}{4} = \frac{n}{4} - 2$ Endpunkte sind.

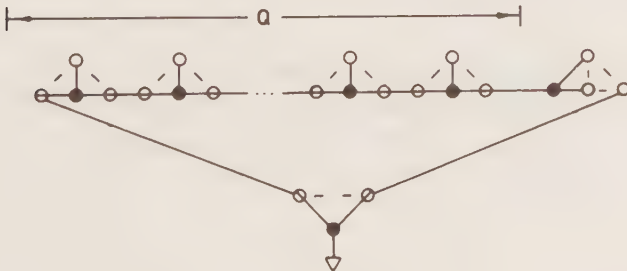


Abb. 67

(cc)

Für alle ganzzahligen p mit $\frac{n}{4} + 2 < p < \frac{n}{2} + 1$ zeigt Abb. 68 Graphen G mit $n \geq 10$ Knotenpunkten, für die $e(G) = p$ ist. Dabei liegen im Teil R des Graphen G $r = 4p - n - 8$ Knotenpunkte, von denen im Gerüst $\frac{r}{2} = 2p - \frac{n}{2} - 4$ Endpunkte sind, und im Teil S $s = 2n - 4p$ Knotenpunkte, von denen im Gerüst $\frac{s}{4} = \frac{n}{2} - p$ Endpunkte sind.

Es ist z.B. für $p = \frac{n+10}{4}$: $r = 2$ und $s = n - 10$,

für $p = \frac{n}{2}$: $r = n - 8$ und $s = 0$.

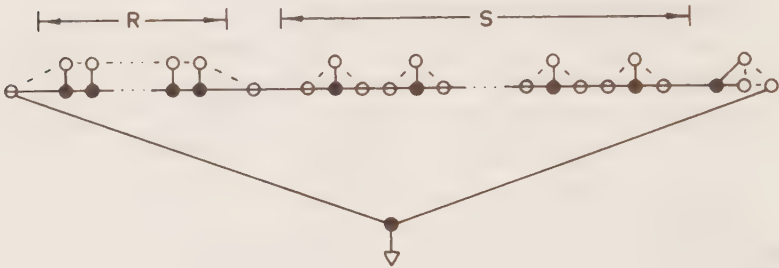


Abb. 68

II. Die Maximalzahl der Endpunkte in Teilbäumen endlicher kubischer Graphen

Die im Kapitel I gewonnenen Ergebnisse werden jetzt auf endliche kubische Graphen (endliche reguläre Graphen vom Grade 3) angewendet.

Satz 3. Für jeden kubischen schlingen- und zweiecklosen zusammenhängenden Graphen G mit n Knotenpunkten und mit mindestens einer Brücke gilt:

$$\frac{n+10}{4} \leq e(G) \leq \frac{n}{2} + 1 \quad \text{und} \quad e(G) \geq 6.$$

Beweis:

(a)

Nach Hilfssatz 2 gilt für den Graphen G stets $e(G) \leq \frac{n}{2} + 1$, da jedes Gerüst von G nur Knotenpunkte hat, die höchstens vom Grade 3 sind.

(b)

Es verbleibt zu zeigen, daß für alle Graphen G mit n Knotenpunkten und mindestens einer Brücke $e(G) \geq \frac{n+10}{4}$ und $e(G) \geq 6$ ist.

Für einen schlingen- und zweiecklosen zusammenhängenden Graphen $W(n+1)$ mit $n+1$ Knotenpunkten, von denen ein Knotenpunkt vom Grade 1 ist und n Knotenpunkte vom Grade 3 sind, gilt nach Satz 1 $e(W) \geq \frac{n+1}{4} + 2$ und, da stets $n+1 \geq 6$ ist, $e(W) \geq 4$.

Für den Teil $U(n)$ des Graphen $W(n+1)$, der alle Kanten und nur die n Knotenpunkte vom Grade 3 des $W(n+1)$ enthält (Abb. 69), gilt $e(U) = e(W) - 1$.

Daraus folgt:

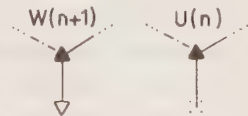


Abb. 69

$$(4) \quad e(U) \geq \frac{1}{4}(n+5) \quad \text{und}$$

$$(4') \quad e(U) \geq 3.$$

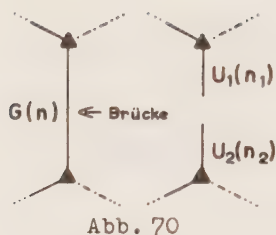


Abb. 70

Jeder kubische schlingen- und zweiecklose zusammenhängende Graph G mit n Knotenpunkten und mindestens einer Brücke besteht aus zwei solchen Teilen $U_1(n_1)$ und $U_2(n_2)$ mit n_1 bzw. n_2 Knotenpunkten (Abb. 70), wobei $n_1 + n_2 = n$ ist.

Für jeden Teil $U_i(n_i)$ gilt nach (4):

$$e(U_i) \geq \frac{1}{4}(n_i + 5) \quad (i = 1, 2).$$

Da $e(G) = e(U_1) + e(U_2)$ ist, folgt:

$$e(G) \geq \frac{1}{4}(n_1 + n_2 + 10) \quad \text{oder}$$

$$e(G) \geq \frac{n + 10}{4}.$$

Nach (4') ist für jeden Teil $U_i(n_i)$ des Graphen G

$$e(U_i) \geq 3 \quad (i = 1, 2).$$

Daraus ergibt sich $e(G) \geq 6$.

Satz 4. Zu jedem geraden $n \geq 10$ und jedem ganzzahligen $p \geq 6$ mit $\frac{n+10}{4} \leq p \leq \frac{n}{2} + 1$ existiert mindestens ein kubischer schlingen- und zweieckloser zusammenhängender Graph G mit n Knotenpunkten und einer Brücke, für den $e(G) = p$ gilt.

Beweis:

Wie bei dem Beweis zu Satz 2 werden Graphen G mit den geforderten Eigenschaften angegeben. In jeder der Abbildungen ist ein Gerüst $B(G)$ des Graphen G , für das $e(B) = e(G)$ ist, mit eingezeichnet.

(a)

Abb. 71 zeigt Graphen G mit n Knotenpunkten, für die $e(G) = p = \frac{n}{2} + 1$ ist. Dabei liegen in dem mit Q bezeichneten Teil des Graphen G $q = n - 8$ Knotenpunkte, von denen im Gerüst $\frac{q}{2} = \frac{n}{2} - 4$ Endpunkte sind.

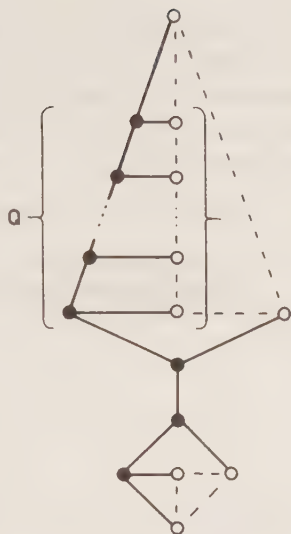


Abb. 71

(b)

Für jedes ganzzahlige $p = \frac{n+10}{4}$ mit $p \geq 6$, was nur für $n \geq 14$ und $n \equiv 2 \pmod{4}$ möglich ist, zeigt Abb. 72 Graphen G mit n Knotenpunkten, für die $e(G) = p = \frac{n+10}{4}$ ist, wobei in dem mit Q bezeichneten Teil des Graphen G $q = n - 14$ Knotenpunkte liegen, von denen im Gerüst $\frac{q}{4} = \frac{n-14}{4}$ Endpunkte sind.

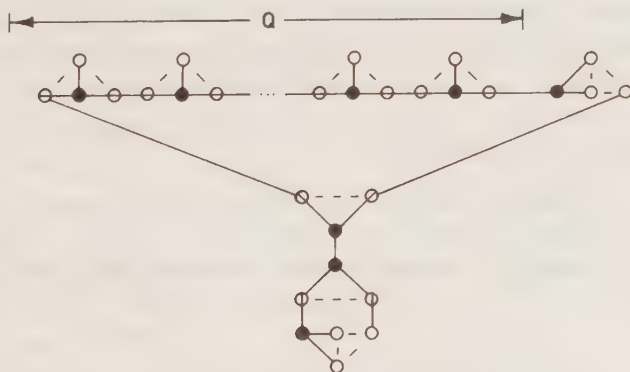


Abb. 72

(c)

Für jedes ganzzahlige $p = \frac{n+12}{4}$, was nur für $n \geq 12$ und $n \equiv 0 \pmod{4}$ möglich ist, zeigt Abb. 73 Graphen G mit n Knotenpunkten, für die $e(G) = p = \frac{n+12}{4}$ gilt, wobei der Teil Q des Graphen G $q = n - 12$ Knotenpunkte enthält, von denen $\frac{q}{4} = \frac{n-12}{4}$ Endpunkte im Gerüst sind.

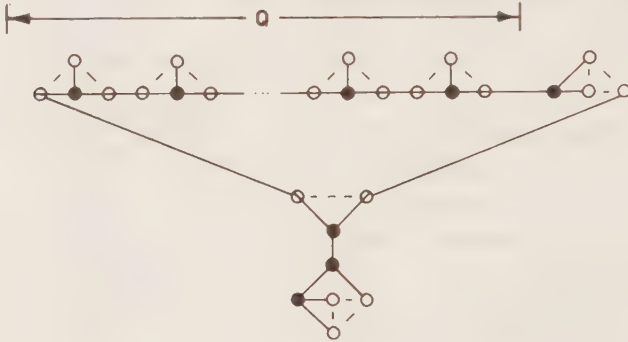


Abb. 73

(d)

Für jedes ganzzahlige p mit $\frac{n+12}{4} < p < \frac{n}{2} + 1$, was nur für $n \geq 14$ möglich ist, zeigt Abb. 74 Graphen G mit n Knotenpunkten, für die $e(G) = p$ gilt, wobei in dem Teil R des Graphen G $r = 4p - n - 12$ Knotenpunkte liegen, von denen im Gerüst $\frac{r}{2} = 2p - \frac{n}{2} - 6$ Endpunkte sind, und im Teil S $s = 2n - 4p$ Knotenpunkte, von denen $\frac{s}{4} = \frac{n}{2} - p$ Endpunkte im Gerüst sind.

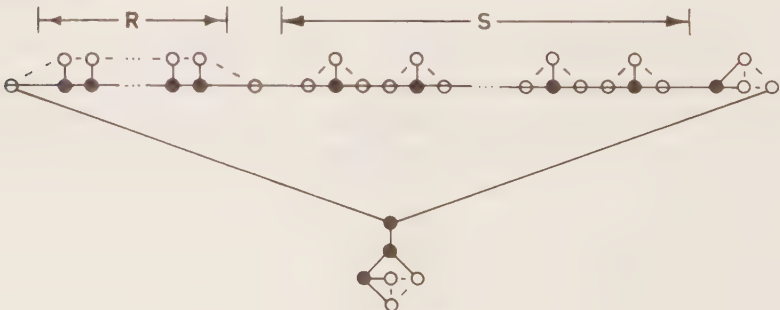


Abb. 74

Satz 5. Für jeden kubischen schlingen- und zweiecklosen zusammenhängenden brückenlosen Graphen G mit n Knotenpunkten gilt:

$$\frac{n+6}{4} \leq e(G) \leq \frac{n}{2} + 1.$$

Beweis:

(a)

Jedes Gerüst des Graphen G hat nur Knotenpunkte, die höchstens vom Grade 3 sind, so daß nach Hilfssatz 2 $e(G) \leq \frac{n}{2} + 1$ ist.

(b)

Auf die untere Schranke $\frac{n+6}{4}$ führen die folgenden Überlegungen.

Zweiteilt man o.B.d.A. eine beliebige Kante ab des Graphen $G(n)$ mit n Knotenpunkten durch den Knotenpunkt v , und verbindet man

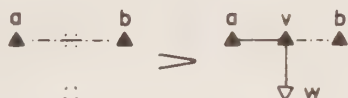


Abb. 75

v mit einem zusätzlichen Knotenpunkt w vom Grade 1 (Abb. 75), so erhält man einen Graphen $W(n+2)$ mit $n+2$ Knotenpunkten, auf den sich Satz 1 anwenden läßt:

$$e(W) \geq \frac{n+2}{4} + 2.$$

Jedes Gerüst $B(W)$ des Graphen $W(n+2)$ läßt sich bei dem Entfernen der Knotenpunkte v und w in ein Gerüst $B'(G)$ des Graphen $G(n)$ mit $e(B') \geq e(B) - 1$ umformen (z.B. Abb. 76).



Abb. 76

Da man diese Abschätzung durch Zweiteilung jeder Kante des Graphen $G(n)$ gewinnen kann, ist

$$e(G) \geq e(W) - 1 \geq \left(\frac{n+2}{4} + 2 \right) - 1, \text{ d.h., } e(G) \geq \frac{n+6}{4}.$$

Satz 6. Zu jedem geraden $n \geq 4$ und jedem ganzzahligen p mit $\frac{n+6}{4} < p \leq \frac{n}{2} + 1$ existiert mindestens ein kubischer schlingen- und zweieckloser zusammenhängender brückenloser Graph G mit n Knotenpunkten, für den $e(G) = p$ gilt.

Beweis:

Zu jedem geraden $n \geq 4$ und jedem ganzzahligen p mit $\frac{n+6}{4} < p \leq \frac{n}{2} + 1$ wird ein gesuchter Graph G mit n Knotenpunkten angegeben, für den $e(G) = p$ ist. Dabei zeigt jede Abbildung gleichzeitig ein Gerüst $B(G)$ des Graphen G mit $e(B) = e(G)$.



(a)

Für $n = 4$ ist nur $p = 3$ möglich. Den einzigen Graphen G mit $n = 4$ Knotenpunkten zeigt Abb. 77, und für ihn gilt $e(G) = p = 3$.

Abb. 77

(b)

Für $n \geq 6$ und $p = \frac{n}{2} + 1$ zeigt Abb. 78 Graphen G mit n Knotenpunkten, für die $e(G) = p = \frac{n}{2} + 1$ ist. In dem mit Q gekennzeichneten Teil des Graphen G liegen dabei $q = n - 6$ Knotenpunkte, von denen $\frac{q}{2} = \frac{n}{2} - 3$ Endpunkte im Gerüst sind.

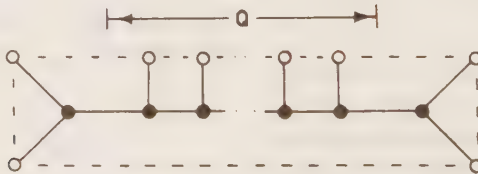


Abb. 78

(c)

Für $n = 6$ existiert kein ganzzahliges p , mit $\frac{n+6}{4} < p < \frac{n}{2} + 1$.

Für $n \geq 8$ und ganzzahliges p mit $\frac{n+6}{4} < p < \frac{n}{2} + 1$ zeigt Abb. 79 Graphen G mit n Knotenpunkten; für die $e(G) = p$ ist. Dabei liegen im Teil R des Graphen G $r = 4p - n - 6$ Knotenpunkte, von denen im Gerüst $\frac{r}{2} = 2p - \frac{n}{2} - 3$ Endpunkte sind, und im Teil S $s = 2n - 4p$ Knotenpunkte, von denen im Gerüst $\frac{s}{4} = \frac{n}{2} - p$ Endpunkte sind.

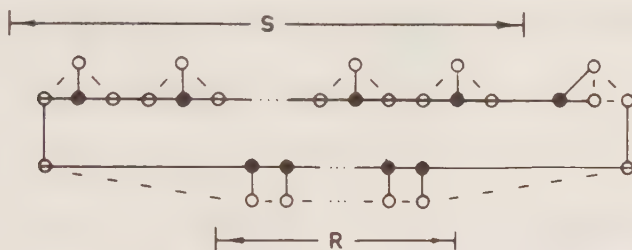


Abb. 79

Unter den betrachteten kubischen Graphen G ließ sich keiner finden, für den $e(G) = \frac{n+6}{4}$ ist.

Das führt zu folgender

Vermutung: Bezeichnet $e(B)$ die Anzahl der Endpunkte eines Baumes B und ist $e(G)$ das Maximum von $e(B)$, wenn B alle Teilbäume des Graphen G durchläuft, so ist vermutlich für jeden kubischen schlingen- und zweiecklosen zusammenhängenden Graphen G : $e(G) \geq \frac{n}{4} + 2$.

Literaturverzeichnis

- (1) Dénes König : Theorie der endlichen und unendlichen Graphen.
Akad. Verlagsgesellschaft,
Leipzig 1936.
- (2) Gerhard Ringel : Färbungsprobleme auf Flächen und Graphen.
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften,
Berlin 1959.
- (3) Frank Harary (edited by) with
Lowell Beineke : A Seminar on Graph Theory.
Holt, Rinehart and Winston,
New York - Chicago - San Francisco
Toronto - London 1967.

Zusammenfassung

Wenn B ein Baum ist, so wird mit $e(B)$ die Anzahl der Endpunkte von B bezeichnet. Es sei $e(G)$ das Maximum von $e(B)$, wenn B alle Teilbäume des Graphen G durchläuft.

Für bestimmte endliche schlingen- und zweiecklose zusammenhängende Graphen G werden folgende Abschätzungen für $e(G)$ hergeleitet.

Besitzt G einen Knotenpunkt vom Grade 1 und $n-1$ Knotenpunkte vom Grade 3, so gilt:

$$(i) \quad \frac{n}{4} + 2 \leq e(G) \leq \frac{n}{2} + 1.$$

Ist G ein kubischer Graph mit n Knotenpunkten und mindestens einer Brücke, so ist:

$$(ii) \quad \frac{n+10}{4} \leq e(G) \leq \frac{n}{2} + 1 \quad \text{und} \quad e(G) \geq 6,$$

ist G ein kubischer brückenloser Graph mit n Knotenpunkten, so ist:

$$(iii) \quad \frac{n+6}{4} \leq e(G) \leq \frac{n}{2} + 1.$$

Die Abschätzungen (i) und (ii) sind in dem Sinne optimal, daß es zu jedem geraden $n \geq 6$ und jedem ganzzahligen p mit $\frac{n}{4} + 2 \leq p \leq \frac{n}{2} + 1$ einen Graphen G mit einem Knotenpunkt vom Grade 1 und $n-1$ Knotenpunkten vom Grade 3 gibt, für den $e(G) = p$ ist, und zu jedem geraden $n \geq 10$ und jedem ganzzahligen $p \geq 6$ mit $\frac{n+10}{4} \leq p \leq \frac{n}{2} + 1$ einen kubischen Graphen G mit n Knotenpunkten und einer Brücke gibt, für den $e(G) = p$ gilt.

Außerdem wird zu jedem geraden $n \geq 4$ und jedem ganzzahligen p mit $\frac{n+6}{4} < p \leq \frac{n}{2} + 1$ ein kubischer brückenloser Graph G mit n Knotenpunkten angegeben, für den $e(G) = p$ ist.

Lebenslauf

Als Sohn des jetzigen Oberstudienrats Ernst Kleinert und seiner Ehefrau Marie, geb. Liedtke, wurde ich, Michael Kleinert, am 16.10.1940 in Berlin geboren.

Von 1946 bis 1952 besuchte ich die 14. Grundschule in Berlin - Lichterfelde. Dieser Schulbesuch wurde von September 1948 bis Juli 1949 durch einen Aufenthalt in Schweden, wo ich in schwedische Schulen in Malmö und Liden (Medelpad) ging, unterbrochen. 1952 wurde ich Schüler der Tannenberg - Schule (Gymnasium) in Berlin und legte dort 1959 die Reifeprüfung ab, bei der ich wegen guter Leistungen von der mündlichen Prüfung befreit wurde.

Vom Sommersemester 1959 bis zum Wintersemester 1965/66 studierte ich an der Freien Universität Berlin Mathematik und Physik sowie Philosophie und Pädagogik. Im Februar 1965 bestand ich die Erste (Wissenschaftliche) Staatsprüfung für das Amt des Studienrats mit „gut“. Danach war ich als wissenschaftlicher Mitarbeiter der Heidelberger Akademie der Wissenschaften in der Redaktion des Referatenorgans Zentralblatt für Mathematik in Berlin tätig.

Anschließend war ich von April 1966 an Studienreferendar in Berlin und bestand im Dezember 1967 die Zweite Staatsprüfung für das Amt des Studienrats mit „Auszeichnung“.

Seit dieser Zeit bin ich Studienassessor an der Schüler - Oberschule (Gymnasium) in Berlin - Charlottenburg.

Michael Kleinert

